The Effect of Color on Dimension Calculation with Emphasis on Fractal Art

ISSN (P): 2980-7956
ISSN (E): 2821-2452

10.22034/jivsa.2024.460495.1091

Keyhane Reisi[1*] Jalil Jokar[2*]

[*]**Corresponding Author:**Keyhane Reisi **Email**:Keyhane.reisi@yahoo.com

Address: * Master's student in Persian Painting, Faculty of Handicrafts, Isfahan University of Art, Isfahan, Iran.

Citation: Raisi, K. & Jokar, J. (2024), The Effect of Color on Dimension Calculation with Emphasis on Fractal Art, *Journal of Interdisciplinary Studies of Visual Arts*, 2024, 3 (5), P.26-39

Received: 31 May 2024
Revised: 25 Aug 2024
Accepted: 28 Sept 2024
Published: 28 Sept 2024

Abstract

Color is one of the most important visual elements for distinguishing phenomena from one another, conveying a wealth of information, emotions, and unspoken meanings. It plays a significant role in the representation of the details of fractal structures. Fractal art refers to a novel and innovative form of visual art within digital art that arises from the replication of mathematical logical functions. Fractal geometry, known as the geometry of nature, appears in many visual arts; color, as an inseparable element, shines alongside form in fractal art. Given that fractal dimension indicates the level of complexity, irregularity, and roughness, color can visually enhance or reduce these complexities, irregularities, and roughness. Therefore, the question arises: to what extent does the color factor influence the calculation of dimension—a crucial characteristic of fractals? The goal of this research is to determine the extent of color's impact on dimension in fractal art. This research is fundamental in nature and descriptive-analytical in its methodology. Data collection was conducted through library research and the software "Fractalys" was used to determine fractal dimensions. The color samples were first converted to grayscale images and then to binary images before their fractal dimensions were calculated. By calculating the dimensions of samples in blue, red, and green colors, it was found that after black, blue has the highest fractal dimension while green has the lowest. Therefore, based on the obtained results, color is a significant factor in fractal dimension calculations; different colors have varying effects on this dimension.

Keywords:Color; Dimension Calculation; Fractal Art; Grayscale Image; Binary Image

[1*]Master's student in Persian Painting, Faculty of Handicrafts, Isfahan University of Art, Isfahan, Iran.

[2] Instructor, Department of Islamic Art, Faculty of Handicrafts, Isfahan University of Art, Isfahan, Iran.

Introduction

The most important and fundamental factor in human perception of the environment is the use of visual senses. Among these senses, color is perceived alongside form as one of the first elements noticed by humans. Color is a significant and meaningful dimension in art; it serves as an alphabet for an artist's emotions through which they communicate and exchange ideas (Ayatollahi 2022: 139). Color complements form to create aesthetically pleasing combinations. Therefore, across all forms of art, color has a profound impact on viewers.

Our surroundings are filled with colors that draw attention due to their unique characteristics at various times throughout the day—carrying a wealth of information—making them particularly important for those involved in visual communication (Mossadeghian 2005: 90). In Iranian painting and visual arts specifically—color holds its own philosophy and world—and within this realm—the study—and practical application—of color embodies wisdom—and worldview.

The taste—and skill—in understanding colors—and their properties by talented Iranian artists—and painters—is both fascinating—and valuable (Jokar 2010: 11). Since fractal art—a novel visual art form within digital art arising from mathematical logical functions—holds special significance across various visual arts such as music—cinema—architecture—and sculpture—it remains closely linked with elements like color.

Hence—it can be said—that within fractal art—as a type-of-visual-art—color holds special significance—in fact—it gives depth—to-the-display-of-fractals allowing-for-the-presentation-of-more-detailed-aspects-of-them.

Research Review

Fractal science, although emerging, has seen limited research. Islamic patterns exhibit fractal characteristics through their repetitive designs (Kaplan & Lin, 2023; Webster, 2013). Previous studies have calculated the fractal dimension of grayscale and colored images, including textured and rough-colored images (Ansari & Pandi, 2020; Nayak & Mishra, 2017; Ivanovici & Richard, 2010). Fractal art bridges art and science by representing nature through mathematical principles (Saitis, 2017; Scotto Rosato, 2010; Grossi, 2008). This convergence has influenced both visual and traditional arts (Mobini & Fateh-Allah, 2014; Jokar, 2005). However, research on the impact of color on fractal dimension is sparse. This study aims to fill this gap by examining how color affects the fractal dimension in various samples using Fractalys software.

Research Methodology

This fundamental research employs a descriptive-analytical approach. Information was gathered from library resources to build the theoretical foundation. The Fractalys software analyzed three basic fractals and three samples of fractal art to assess the effect of color on their dimensions. Data were quantitatively analyzed.

Research Findings

Fractal geometry offers a new perspective on complex geometric issues with shapes that exhibit consistent irregularity across scales. Factors like complexity and texture influence the fractal dimension—higher complexity leads to a higher dimension. Fractal art merges mathematics with visual arts through self-similarity and fractional dimensions. This study explores how primary colors (red, green, blue) affect the fractal dimension in images. Using the box-counting method in Fractalys software, dimensions of basic fractals (Sierpiński triangle/carpet and Koch curve) and fractal art samples were calculated after converting colored images to grayscale and then binary format. The findings suggest that while color is crucial in visual arts, its impact on the calculated fractal dimension requires further exploration due to conversion processes involved in analysis

Conclusion

In this study, the fractal dimension of several basic fractals and samples of fractal art in the primary colors of red, blue, and green was calculated using the Fractalys software. The colored images were converted to grayscale before being turned into binary images. Different colored images exhibited varying levels of grayscale intensity, which had a direct effect on the color density in the binary image. The results showed that, after black, blue had the highest grayscale intensity and binary density, thus having the highest fractal dimension. Conversely, green exhibited the lowest grayscale intensity and binary density, resulting in the lowest fractal dimension.

Blue, with its hue of nine, relates to geometric shapes like the circle, which is considered the most complete and symmetrical shape. The circle has infinite lines of symmetry, making it the most symmetrical basic shape, and the sum of all its principal angles equals 9. In addition to these characteristics, blue also had the highest fractal dimension after black. Blue had the least reduction effect on fractal dimension, whereas green had the most significant reduction effect. The higher the fractal dimension, the greater the reducing effect of green on it, and

vice versa.
Ultimately, this research concluded that color is a significant factor influencing fractal dimension. Since fractal dimension is a measure for quantifying complexity, irregularity, texture, and roughness, colors can alter these features' perception by affecting their fractal dimensions.

Funding
There is no funding support.

Authors' Contribution
Authors contributed equally to conceptualization and writing of this article. All authors approve of its content and agree on all aspects of this work.

Conflict of Interest
Authors declared no conflict of interest.

Acknowledgments
We are grateful to all persons for scientific consulting in this paper.

مقاله پژوهشی

تاثیر رنگ در محاسبه بُعد با تاکید بر هنر فرکتال

ISSN (P): 2980-7956
ISSN (E): 2821-2452

10.22034/jivsa.2024.460495.1091

کیهانه رئیسی[*1]، جلیل جوکار[*2]

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۳/۱۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۰۷

چکیده

رنگ یکی از مهم‌ترین عناصر تجسمی برای تشخیص پدیده‌ها از یکدیگر است که بیانگر اطلاعات و احساسات و ناگفته‌های زیادی می‌باشد و در نمایش جزئیات ساختار فرکتال‌ها موثر می‌باشد. منظور از هنر فرکتال هنر بصری بدیع و تازه‌ای در هنر دیجیتال است که از تکثیر توابع منطقی ریاضی پدید آمده است. هندسه فرکتال به عنوان هندسه طبیعت در بسیاری از هنرهای تجسمی وجود دارد و رنگ نیز به عنوان یک عنصر جدایی ناپذیر درکنار فرم در هنر فرکتال جلوه‌گری می‌کند؛ با توجه به اینکه بُعد فرکتال معرف میزان پیچیدگی، نامنظمی و ناهمواری می‌باشد، رنگ می‌تواند میزان این پیچیدگی‌ها ، نامنظمی‌ها و ناهمواری‌ها را از نظر بصری کاهش یا افزایش دهد. لذا این سوال مطرح می‌شود که عامل رنگ به چه میزان در محاسبه بُعد که از ویژگی‌های مهم فرکتال‌هاست، موثر می‌باشد؟ هدف این پژوهش دستیابی به میزان تاثیر رنگ بر بُعد، در هنر فرکتال است. این پژوهش از نظر هدف بنیادی و از نظر روش توصیفی و تحلیلی است. برای داده‌اندوزی از روش‌کتابخانه‌ای و برای تعیین ابعاد فرکتال از نرم‌افزار فرکتالیز استفاده می‌شود. نمونه‌های رنگی پس از ورود به نرم افزار به تصویرخاکستری۱ و سپس به تصویر باینری۲ تبدیل می‌شوند و بُعد فرکتال آن محاسبه می‌گردد. با محاسبه بُعد نمونه‌ها در رنگ‌های آبی، قرمز و سبز این نتیجه حاصل شد که پس از رنگ سیاه، آبی بالاترین و سبز کمترین بُعد فرکتال را دارد. لذا با توجه به نتایج به دست آمده، رنگ یک عامل مهم در میزان بُعد فرکتال می‌باشد و رنگ‌های مختلف اثرات متفاوتی در بُعد خواهند داشت.

کلید واژه ها: رنگ، محاسبه بُعد، هنر فرکتال، تصویر خاکستری، تصویر باینری

[*1] نویسنده مسئول: دانشجوی کارشناسی‌ارشد نقاشی ایرانی، دانشکده صنایع‌دستی، دانشگاه هنر اصفهان، اصفهان، ایران
Email: Keyhane.reisi@yahoo.com

[۲] گروه هنر اسلامی، دانشکده صنایع‌دستی، دانشگاه هنر اصفهان، اصفهان، ایران

۱. مقدمه

مهمترین و اصلی‌ترین موضوعی که در ادراک انسان از محیط موثر است استفاده از حس بصری می‌باشد. در این میان اولین چیزی که همراه با فرم درک می‌شود رنگ است. رنگ مهمترین و پرمحتواترین بُعد هنر است. رنگ الفبای احساس هنرمند است. او با این الفبا سخن می‌گوید و تبادل اندیشه می‌کند(آیت الهی،۱۴۰۱، ص. ۱۳۹). رنگ بر فرم می‌نشیند و با هم ترکیبی چشم نواز را می‌آفرینند. لذا در تمامی هنرها رنگ بیشترین تاثیر را بر بیننده دارد. پیرامون ما از رنگ پوشیده شده است و این عنصر با خصوصیاتی که دارد توجه همه انسانها را به خود جلب می‌کند. رنگ‌ها در ساعات مختلف روز انعکاس‌های متفاوت دارند. آنها در واقع حاوی اخبار و اطلاعات زیادی نیز هستند و از این جهت برای کسانی که در کار ارتباط بصری هستند، این موضوع واجد اهمیت می‌باشد(مصدقیان،۱۳۸۴، ص.۹۰). در نقاشی و هنرهای تجسمی ایران، رنگ فلسفه و دنیای ویژه خود را دارد و در جهان هنر، رنگ شناسی درحوزه کاربردی دارای حکمت و جهان‌بینی خاص خود است. ذوق و سلیقه در شناخت رنگ‌ها و خواص آن‌ها از جانب هنرمندان و نقاشان توانای ایران زمین بسیار جالب و ارزشمند است(جوکار،۱۳۸۹، ص۱۱). از آنجا که هنر فرکتال به عنوان یک هنر بصری بدیع و تازه در دامن هنر دیجیتال، که از تکثیر توابع منطقی ریاضی پدید می‌آید و جایگاه ویژه ای در هنرهای تجسمی از قبیل موسیقی، سینما، معماری و مجسمه سازی نیز دارد، با عنصر رنگ در ارتباط است. لذا می‌توان گفت در هنر فرکتال، به عنوان یکی از گونه‌های هنرهای تجسمی، رنگ جایگاه ویژه‌ای دارد. در واقع این رنگ است که به نمایش فرکتال‌ها عمق می‌دهد و باعث می‌شود بتوان جزئیات بیشتری از آنها را نمایش داد. از آنجا که فرکتال‌ها درکنار ویژگی خودمتشابهی دارای بُعد فرکتال(بُعدکسری) می‌باشند. لذا این پژوهش برآن است که با محاسبه بُعد در چند نمونه از فرکتال‌های پایه و همچنین نمونه‌هایی از هنر فرکتال در رنگ‌های آبی، سبز و قرمز و مقایسه آنها دریابد که رنگ به چه میزان بر بُعد فرکتال تاثیرگذار است؟ فرضیه تحقیق این است که تغییر فام رنگ در اشکال ثابت فرکتال در کمیت بُعد آن‌ها موثر است.

پیشینه پژوهش

از آنجا که دانش فرکتال از دانش‌های نوظهور است، پژوهش‌های انجام شده در این زمینه بسیار محدود می‌باشند. کپلان و لین[۳] (۲۰۲۳) در مقاله «الگوهای آزاد هندسی اسلامی» با تکرار نقوش اسلامی در مقیاس‌های مختلف طرح‌هایی آزاد و نامتناهی (به تعداد زیاد و تا مقیاس‌های بسیار کوچک)از الگوهای اسلامی را خلق کرده است که نمونه‌ای از هنر فرکتال می‌باشد. انصاری و پاندی[۴] (۲۰۲۰) در مقاله‌ای تحت عنوان «محاسبه بُعد فرکتال تصویرخاکستری و رنگی» به محاسبه بُعد فرکتال تصویر یک میمون به صورت خاکستری و رنگی با کمک نرم افزار پرداخته است. نایاک و میشرا[۵] (۲۰۱۷) در مقاله‌ای تحت عنوان «محاسبه بُعد فرکتال تصاویر رنگی» به محاسبه بُعد فرکتال درتصاویر رنگی دارای بافت و ناهموار با استفاده از الگوریتم جعبه شمار دیفرانسیلی اصلاح شده پرداخته و به این نتیجه رسیده‌اند که تصاویر دارای ناهمواری و بافت بالاتر نسبت به تصاویر صاف و هموار دارای بُعد بالاتری می‌باشند. سایتیس[۶] (۲۰۱۷) در کتاب «هنر فرکتال، به بهشت نزدیک تر، هنر طبیعت و طبیعت هنر» زیباشناسی طبیعت را سرلوحه دستاوردهای هنری قرار داده و با اشاره به اینکه علم و هنر هر دو در صدد بازنمایی طبیعت هستند آن دو را در راستای یکدیگر و عامل ایجاد هنر فرکتال دانسته است. وبستر[۷] (۲۰۱۳) در مقاله «الگوهای هندسی اسلامی فرکتالی بر اساس آرایش ۲/n ستاره» تعداد زیادی آثار خلاقانه الگوهای اسلامی فرکتالی بوجود آورده است. ایوانوویچی و ریچارد[۸] (۲۰۱۰) در مقاله «بُعد فرکتال تصاویر رنگی فرکتالی» به محاسبه بُعد فرکتال تصاویر رنگی پرداخته است. اسکاتو راستو[۹] (۲۰۱۰) در مقاله‌ای تحت عنوان «فرکتال آرت» به بررسی هنر فرکتال به عنوان نیاز مشترک هنر و علم و روابط بین آنها می‌پردازد. مبینی و فتح الهی(۱۳۹۳) در مقاله «بررسی جایگاه هندسه فرکتال در هنر و چگونگی ظهور آن در هنرهای تجسمی» به دنبال یافتن کاربردهای هندسه فرکتال در هنر می‌باشد و به این نتیجه رسیده‌اند که دانش فرکتال در نقاشی، موسیقی و معماری راه یافته است. گروسی(۱۳۸۷) در مقاله‌ای با عنوان «فرکتال آرت» این هنر را عرصه نوینی از کامپیوتر آرت و هنرهای الگوریتمی دانسته و پیوستگی هنر با ریاضیات را علت ظهور هنر فرکتال می‌داند. جوکار(۱۳۸۴) در کتاب «فرکتال و فرکتال‌گرایی درهنر» به معرفی فرکتال‌ها و نمود آن‌ها در هنرهای تجسمی و هنرهای سنتی پرداخته است. با توجه به پژوهش‌های ذکر شده پیرامون تاثیر رنگ بر میزان بُعد فرکتال تا زمان نگارش این پژوهش، در این خصوص پژوهشی به زبان فارسی در ایران یافت نشد. در این پژوهش تاثیر رنگ بر هنر فرکتال در چندین نمونه توسط نرم افزار فرکتالیز بررسی می‌شود. لذا این پژوهش در نوع خود نوین می‌باشد.

روش انجام پژوهش

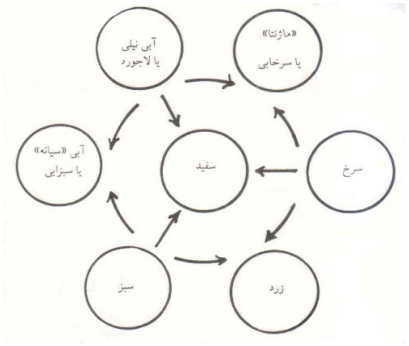
این پژوهش از نظر هدف بنیادی و از نظر روش توصیفی و تحلیلی است. برای گردآوری اطلاعات و تکمیل مبانی نظری از منابع کتابخانه‌ای استفاده شده است. برای تجزیه و تحلیل و محاسبه بُعد فرکتال از نرم افزار فرکتالیز[۱۰] برای تحلیل ۳ نمونه فرکتال پایه و تاثیر رنگ در تغییر بُعد آنها و همچنین ۳ نمونه هنر فرکتال استفاده می‌شود. سپس داده‌ها به صورت کمی تجزیه و تحلیل خواهند شد.

۲. مبانی نظری پژوهش

۲-۱. رنگ

رنگ و نور همواره در قالب بخش‌هایی مهم از حیات ما بر روی کره خاکی مطرح بوده‌اند. از نظر علمی رنگ ماده‌ای است که مجموعه‌ای از طیف‌های نور سفید را جذب و تعدادی را منعکس می‌کند و انرژی جذب شده به صورت پرتو نورانی مشخصی دوباره از ماده ساطع می‌گردد. درواقع رنگ بازتابی ازنور است که این بازتاب مجموعه‌ای وسیع را شامل می شود. رنگ‌ها در نور بوجود می‌آیند(استوار،۱۳۹۱، ص.۱۰). برای مثال وقتی نور خورشید یا نور سفید به ماده‌ای به رنگ آبی می‌تابد قسمتی از پرتو نورانی را جذب می‌کند و از خود پرتو نورانی آبی را متصاعد می‌سازد. در واقع هر ماده به لحاظ ترکیب شیمیایی و ساختار مولکولی پرتو مشخصی به سوی چشم گسیل می‌دارد(جوکار،۱۳۸۹، ص. ۲۰-۲۳). منظور از رنگ‌های اصلی رنگ‌هایی است که در بیناب نور خورشید آشکار می‌گردد. در اصطلاح رنگ شناسی به رنگ‌های سرخ و سبز و آبی (رنگ‌های نوری) رنگ‌های اصلی می‌گویند که از ترکیب این سه رنگ نورسفید ایجاد می‌شود(تصویر۱). در حالی که در رنگ‌شناسی مادی آمیزه ماده رنگی را مطرح می‌کند و به رنگ‌های سرخ، زرد و آبی رنگ‌های اصلی گفته می‌شود. حال اگر رنگدانه‌های اصلی شامل: قرمز ماژنتا، آبی سایان و زرد و رنگدانه‌های فرعی شامل: نارنجی، سبز وآبی تیره باشد، از ترکیب رنگدانه‌های اصلی و رنگ دانه‌های فرعی به صورت دو به دو آبی تیره، سبز و قرمز آتشین یعنی همان رنگ‌های اصلی (نوری) به‌وجود می‌آید.

اگر در یک جدول تاریک روشن که از سفید تا سیاهش تنها سیزده زینگی[۱۱] (تاریک -روشن) داشته باشد، سرخ دارای زینگی ۷ و رنگ آبی دارای زینگی ۹ است. اثر آبی همانند اثر سیاه است زیرا که شب، آبی تیره است. آبی حرکت دورانی درون گرا دارد و به همین دلیل در شکل‌های هندسی با دایره توافق دارد و هماهنگ است (آیت‌الهی،۱۴۰۱، ص.۱۵۴). مصریان باستان آبی را نماد حقیقت و کمال می‌دانستند که بعدها در تمثال مریم عذرا نیز ظهور کرد (محمودی و شکیبامنش،۱۳۸۹: ص.۳).



تصویر۱. نورهای رنگی مولد نور سفید(حبیب الهی،۱۴۰۱، ص.۱۴۷).

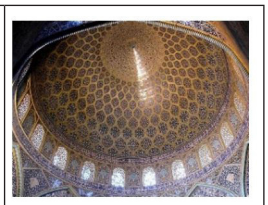
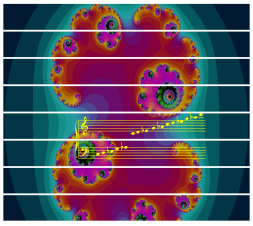
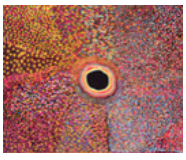
۲-۲. هندسه فرکتال

هندسه فرکتال[۱۲] روشی نوین برای نگریستن به جهان هستی است. چرا که ما توسط الگوهای طبیعت احاطه شده‌ایم. هندسه فرکتال یک زبان جدید است، وقتی بتوانید با آن صحبت کنید، به همان دقتی که یک معمار می‌تواند یک خانه را توصیف کند می توانید طبیعت را توصیف کنید(Bransley, 2012, p.1). در واقع هندسه فرکتال هندسه طبیعت است. فرکتال‌ها اشکالی هستند که بر خلاف اشکال هندسی اقلیدسی از نظم اقلیدسی پیروی نمی‌کنند ولی میزان بی‌نظمی آنها در تمام مقیاس‌ها یکسان است. در حالی که هندسه کلاسیک اقلیدسی با اجسامی کار می‌کند که در ابعاد عدد صحیح وجود دارند، هندسه فرکتال با اجسام در ابعاد غیر عدد صحیح سروکار دارد. فرکتال‌ها دارای خاصیت تولید پیچیدگی از فرآیندهای ساده و تکراری هستند(Pickover,1995,p.9). واژه فرکتال از ریشه لاتین فرکتوس[۱۳] به معنای سنگی که به طور نامنظم شکسته شده است، می‌باشد. به این معنی که اگر شما یک جز کوچک از فرکتال را بشکنید شبیه به کل آن است(Frantz, 2011, p.140). این اصطلاح توسط مندلبروت[۱۴] در حدود سال۱۹۷۵م ابداع شد تا به طور شهودی یک شی پیچیده، خشن یا شکسته را توصیف کند. او از اشیاء موجود در طبیعت مانند شکل ابر، کوه یا مسیر یک رودخانه الهام گرفت، اما ایده‌های او پیشروی‌های زیادی در ریاضیات و علوم دیگر داشت (McClure, 2022, p.1). پس از ابداع هندسه فرکتال توسط مندلبروت این بی‌نظمی‌ها که در عین حال منظم هستند با استفاده از ویژگی‌های فرکتالی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.

۲-۳. هنر فرکتال

از آنجا که علم و هنر هر دو در صدد بازنمایی حقایق طبیعت هستند، دانش به ما کمک می‌کند که اصول ترکیب بندی در رنگ و شاکله کلی یک اثر را درک کنیم و بتوانیم از این اصول در خلق آثار هنری شاخص بهره گیریم. در واقع پیوستگی‌های هنری و ریاضیاتی منجر به ظهور هنر فرکتال شده است. هنر فرکتال درصدد بازنمایی هندسه طبیعت است(Scotto Rosato,2010,p.1). پیروی و مطابقت با طبیعت در هنر همواره مورد ستایش بوده و بسیاری از اوقات عامل سنجش میزان هنرمندی در اثر می‌باشد. ریاضیات اگرچه به علت برخورداری از ذاتی منطقی و تکرار پذیر با هنر تفاوت های اساسی دارد اما آن نیز مانند هنر از طبیعت برخواسته و در پیروی از قوانین موجود در آن آزمایش می شود. لذا ریاضی و هنر همواره در جهت تکمیل یکدیگر بوده اند(گروسی،۱۳۸۷، صص.۲۲-۲۰).

به هنری که دارای ویژگی‌های اصلی هندسه فرکتال یعنی خودمتشابهی و بُعد کسری باشد هنر فرکتالی گویند. این هنر هم می‌تواند توسط دست و هم توسط کامپیوتر(دیجیتال آرت) خلق شود. از آنجا که در هنر فرکتالی تکرار و دوران در مقیاس‌های مختلف بارها و بارها انجام می‌شود، لذا بیشتر هنرهای فرکتالی به صورت دیجیتال آرت می‌باشد. فرکتال آرت از دوباره سازی اصول تشکیل دهنده فرکتال و نمایش دوباره نتایج محاسبات و وقایع عددی در قالب تصویر توسط کامپیوتر خلق می شود(گروسی،۱۳۸۷، ص۲۳). این هنر را می‌توان در نقاشی، معماری و شهرسازی، موسیقی، مجسمه سازی و غیره یافت. در هنر دوران های مختلف رد پای هندسه فرکتال به وضوح قابل مشاهده است. به عنوان مثال معماری آفریقایی تمایل به فرکتال دارد و این یک طراحی برجسته در فرهنگ آنها به شمار می‌رود که نه تنها در معماری بلکه در هنرهای دیگر هم استفاده می‌شود(تصویر۲-ه)(Eglash,1999,p.44). در آثارهنرمندان بومی استرالیایی و هنر ماندالای هند نیز فرکتال دیده می‌شود(تصویر۲-د). هنر فرکتالی در معماری ایرانی اسلامی نیز به وفور قابل مشاهده می‌باشد. در واقع معماری اسلامی نمونه‌ای موفق در استخراج نسبت‌های ریاضی و هندسه فرکتالی موجودات طبیعی است (Abdelsalam,Ibrahim,2019, P.27). (تصویر۲-الف).

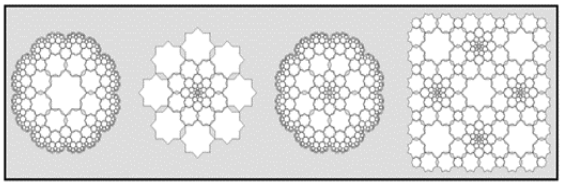
				
الف.زیر گنبد شیخ لطف الله (Rezazade,2020)	ب.فرکتال آرت (Pichover,1995)	ج.فرکتال و موسیقی (Tanasie,Popescu,2007)	د.هنربومیان استرالیایی Toledo Museum of) (Art, 2013	ه.هنر بومیان آفریقایی (Eglash,1999).

تصویر۲. هنرفرکتالی

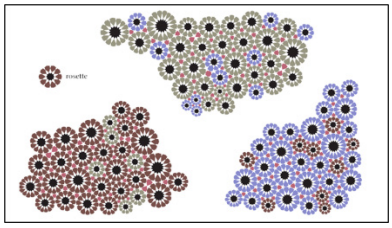
رد پای فرکتال را می‌توان در نقاشی‌های جکسون پولاک پیش از ابداع هندسه فرکتال توسط مندلبروت مشاهده کرد. در سال ۱۹۵۲م او در یک شب طولانی مستانه و در آستانه خودکشی، شالوده‌ای از شاهکارهایش (قطب های آبی:شماره ۱۱، سال۱۹۵۲)(تصویر۳) را بنیان گذاشت. نقاشی‌های پولاک با استفاده از جریان‌های رنگ ساختمانی برای ساختن الگوهای هدایت شده و نیمه تصادفی روی بوم او خلق شدند(Lee, Olsen & Gooch, 2007, p.1). او بوم بزرگی را کف انبارش فرش کرد و با یک تکه چوب و رنگ معمولی روی بوم چکاند و تکنیکی ابداع کردکه در آن جریان ثابتی از رنگ روی بوم‌های افقی ریخته می‌شود و خطوط پیوسته منحصر به فردی را پدید می‌آورد.

تصویر ۳. نقاشی قطب‌های آبی.(Taylor,۲۰۰۷, p.۱۶)

وبستر[۱۵] و کپلان[۱۶] هنرمندان دیگری هستند که در زمینه فرکتال آرت فعالیت داشته‌اند. آنها با تکرار نقوش اسلامی در مقیاس‌های مختلف طرح‌هایی آزاد و نامتنهایی از الگوهای اسلامی خلق کرده‌اند(تصویر۴).



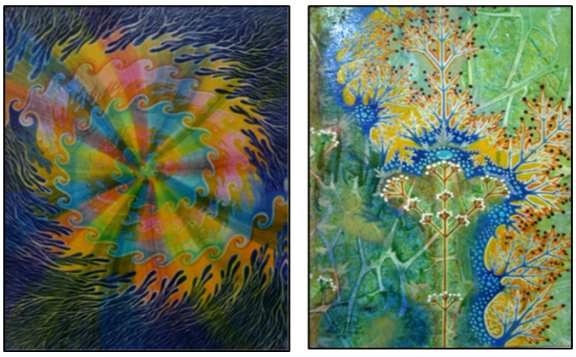
الف. فرکتال آرت اثر وبستر(Webster, 2013, p.91)



ب. فرکتال آرت اثر کپلان ((Kaplan, Lin,2023, p.2.

تصویر ۴. فرکتال آرت

از هنرمندان معاصر می‌توان از جلیل جوکار بنیان‌گذار فرکتالیسم در ایران نام برد که در سال‌های گذشته چندین نمایشگاه با موضوع فرکتالیسم برگزار کرده است(تصویر۵)(URL1).



تصویر ۵. فرکتال آرت.اثر جلیل جوکار(نگارندگان)

۲-۴. خصوصیات اصلی فرکتال‌ها

خود متشابهی[۱۷]

هندسه فرکتال عمدتاً مبتنی بر ایده اشکال خود متشابه است. خود متشابه یعنی اجزای فرمی یک شکل در مقیاس های مختلف رفتار یکسانی دارند(Blanco, 2020, p.171). برای اینکه یک شکل خود مشابه باشد، باید بتوان آن را به بخش هایی تقسیم کرد که کپی‌های کوچکتر کم و بیش شبیه به کل شکل باشند(Aswathy, 2016, p.102). این شکل‌های خود متشابه می‌توانند با تکرار و دوران در مقیاس‌های مختلف ایجاد شوند. اما شکل نهایی مشابه شکل اول باقی خواهد ماند. به عبارت دیگر در این فرآیند نسبت‌های نسبی اضلاع اشکال و زوایای داخلی ثابت خواهد ماند(Bovil,1996, p.15). فرآیندهایی که فرکتال‌ها را تولید می‌کنند فرآیند بازخورد ساده‌ای هستند که عمل یکسانی را مکرراً اجرا می‌کنند((Peitgen, Richter, 1996, p.5. اشکال فرکتالی برخلاف اشکال اقلیدسی که با استفاده از توابع ایستا تولید می‌شوند با فرآیندهای پویا بوجود می‌آیند. فرآیندهای پویا دارای حافظه زمانی هستند و رفتار آنها با گذشته مربوط می‌شود .(Mandelbrot,1982, p. 263)

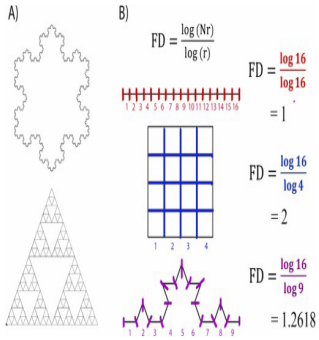
در طبیعت می‌توان شاهد نمونه‌های خودمتشابه بسیاری بود. ویژگی مقیاس پذیر بودن طبیعت است که به هندسه فرکتال امکان می‌دهد که برای مدل سازی بسیار کار آمد باشد (تصویر۶). داشتن یک شکل مقیاس پذیر به این معنی است که الگوهای مشابهی در مقیاس‌های مختلف داخل محدودهٔ مورد نظر وجود دارد. بزرگنمایی یک بخش کوچک شکلی را ارائه می‌کند که شبیه کل تصویر به نظر می‌آید وکوچک کردن کل تصویر چیزی شبیه یک قسمت کوچک را به دست می‌دهد(Eglash, 1999, p.17).

تصویر۶ .فرکتال در طبیعت (اسکندر دوست،۱۳۹۹: ۱۵۳).

بُعد کسری

هندسه فرکتال به مطالعه مسائل هندسی پیچیده می‌پردازد و مفهوم بُعد یک اندازه گیری کمی از این پیچیدگی است. به عبارت دیگر بُعد در هندسه فرکتال یک معیار ریاضی در تعیین درجهٔ پیچیدگی بافت در حال نمایش است (McClure, 2022, p.42). مفهومی که اولین بار توسط ریاضیدان فلیکس هاسدورف[۱۸] در سال ۱۹۱۸م معرفی شد. معمولاً بُعد به صورت یک عدد صحیح در

نظر گرفته می‌شود. برای مثال از نظر هندسه اقلیدسی بُعد نقطه را صفر، بُعد خط یک و بُعد سطح را دو در نظر می گیریم. اما پدیده‌های فرکتالی دارای بُعد کسری می‌باشند. در(تصویر۷) بُعد خود متشابه با کمک فرمول(۱) D= Log N/ Log S محاسبه شده است که در آن N تعداد قطعات و S تعداد قطعاتی که خط اولیه به آن تقسیم شده است (مقیاس) می باشد.



تصویر۷. مقایسه بُعد صحیح بابُعدکسری (Ziukelis,2022)

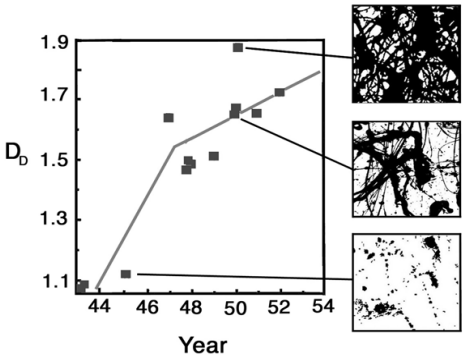
یکی از پرکاربرد ترین روش‌های محاسبه بُعد روش جعبه شمار است. شبکه ای از خانه‌های مربع شکل روی تصویر خود قرار داده، اندازه شبکه با عنوانs مشخص می شود و تعداد خانه‌هایی که بخشی از تصویر را در خود جای داده است برابر N(S)خواهد بود. این روند را با تغییرs به شبکه‌های ریزتر و شمارش تعداد خانه‌های در بردارنده تصویر یا N(S) تکرار کنید. برابر تعداد خانه‌ها در امتداد پایین شبکه است(Bovill, 1996,p.41-42).

بُعد فرکتال بصورت زیر محاسبه می شود:

$$D_b=\frac{[\log(N(S2))-\log(N(S1))]}{[\log(\frac{1}{S2})-\log(\frac{1}{S1})]}$$

۲-۵. عوامل موثر بر بُعد فرکتال

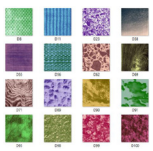
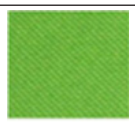
شکل فرکتالی خصوصیاتی چون بافت[۱۹]، پیچیدگی[۲۰]، شکستگی[۲۱] ، صافی[۲۲] و ناهمواری[۲۳] دارد که همه آنها بر بُعد فرکتال تاثیر گذار می‌باشد. بُعد فرکتال اغلب به عنوان یک پارامتر پیچیدگی، به عنوان مثال برای تعیین میزان ناهمواری سطح، یا برای طبقه بندی بافت‌ها یا الگوهای خط استفاده می‌شود و در نتیجه نشان دهنده تنوع در سطوح مختلف خاکستری است که بر روی سطح ایجاد می‌شود(Sandau,1997, p.164). معیار پیچیدگی و شکست می‌تواند در میزان بُعد فرکتال موثر باشد. هرچه قدر میزان پیچیدگی، ناهمواری و شکست بیشتر باشد، بُعد فرکتال نیز بیشتر خواهد شد. برای مثال در محاسبه بُعد قسمت‌های متفاوت از نقاشی‌های جکسون پولاک، در قسمت‌های دارای پیچیدگی بالاتر و تراکم بیشتر رنگ:



تصویر۸. محاسبه بُعد فرکتال نقاشی جکسون پولاک(Taylor, Richard, 2007).

بافت تصویر از دیگر عوامل موثر بر بُعد فرکتال است. تصاویر دارای بافت و ناهمواری معمولاً دارای بُعد فرکتال بالاتر هستند. همچنین تصاویر با بافت‌های مختلف دارای بُعد متفاوت هستند(جدول۱). تصاویر صاف و هموار بُعد فرکتال کمتری دارند تا جایی که تصاویر کاملاً صاف دارای بُعد کسری نیست(Nayak, Mishra,2017,p.33).

جدول ۱. مقایسه بُعد تصاویر بر مبنای بافت و ناهمواری (Nayak, Mishra,۲۰۱۷).

تصویر			
بُعد فرکتال	D=2.93	D=2	D=2.81

در ادامه به بررسی رنگ به عنوان عامل دیگر موثر بر بُعد فرکتال پرداخته خواهد شد.

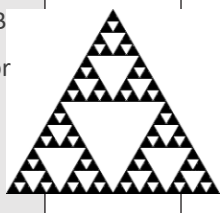
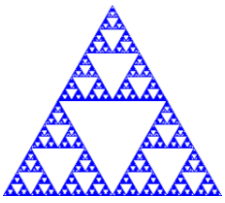
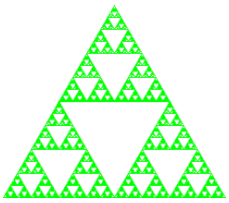
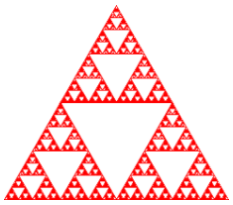
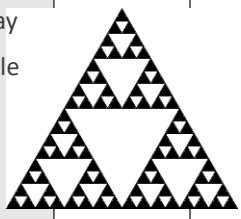
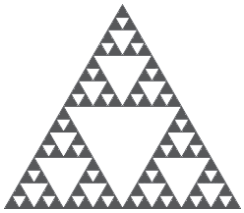
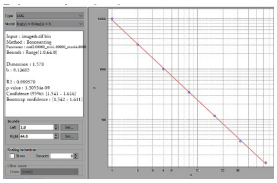
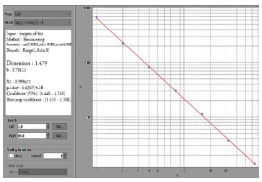
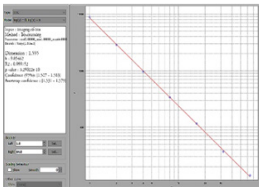
۳. تاثیر رنگ بر بُعد فرکتال

برای بررسی تاثیر رنگ بر بُعد فرکتال، بُعد چند نمونه فرکتال پایه و همچنین نمونه‌هایی از هنرفرکتال با کمک نرم افزار محاسبه می‌شود. در محاسبه بُعد تصاویر رنگی(RGB) با نرم افزار، نمونه‌ها پس از وارد شدن به نرم افزار به تصاویر خاکستری و سپس باینری تبدیل می‌شوند. ازآنجا که زمان تبدیل تصاویر رنگی به خاکستری، تصاویر با رنگ‌های مختلف آبی، قرمز و سبز دارای درجه خاکستری متفاوت هستند، در فرمت باینری میزان تراکم رنگ سیاه و سفید متفاوت و در نتیجه عدد بُعد نیز متفاوت خواهد بود. این نرم افزار به محاسبه بُعد با روش جعبه شمار می‌پردازد. شیب خط نمودار log(1/s) , logN(s) برابر عدد بُعد می‌باشد.

فرکتال پایه ۱: مثلث سرپینسکی۲۴

این مثلث توسط سرپینسکی ریاضیدان لهستانی در سال ۱۹۱۹م ابداع شد. تولید این مثلث از ترسیم یک مثلث ساده شروع می‌شود. در مرحله اول با حذف مثلث میانی از شکل سه مثلث پیرامون آن به دست می‌آید. در مرحله بعد همین فرآیند تکرار می‌شود. این کار را می‌توان تا بینهایت تکرار کرد(McClure,2022, p.6). در مثلث سر پینسکی به رنگ سیاه با کمک فرمول(۱) D= Log 3/ Log 2=1.58. بُعد مثلث سرپینسکی در رنگ های قرمز، سبز و آبی با نرم افزار محاسبه شده است(جدول۲).

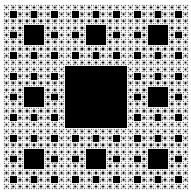
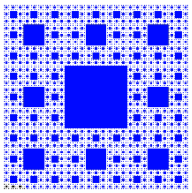
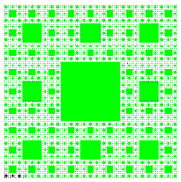
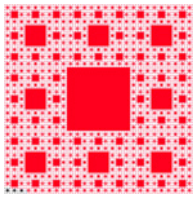
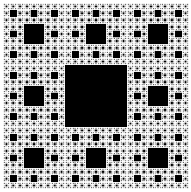
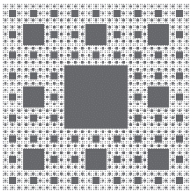
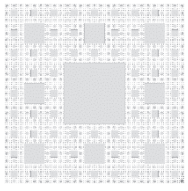
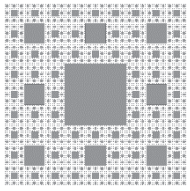
جدول ۲. محاسبه بُعد مثلث سرپینسکی در رنگ‌های آبی، سبز و قرمز (نگارندگان)

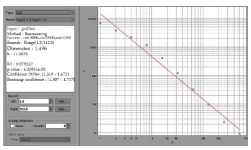
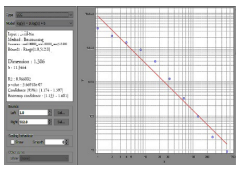
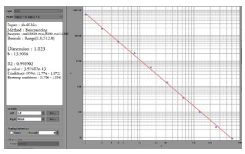
RGB	R=0 G=0 B=0	R=0 G=0 B=255	R=0 G=255 B=0	R=255 G=0 B=0
RGB color				
Gray scale				
Dimen-sion	1.58	1.57	1.47	1.55
				
	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویرآبی	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر سبز	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر قرمز	

فرکتال پایه۲: مربع سرپینسکی

این مربع توسط سرپینسکی[۲۵] ریاضیدان لهستانی تولید شد. برای رسم این مربع، از یک مربع ساده شروع می‌شود. در مرحله اول با تقسیم مربع به ۹ قسمت مساوی و حذف مربع مرکزی و تکرار این روش برای هشت مربع باقی مانده و تکرار آن تا بی نهایت به دست می‌آید (Frantz,2011,p.148). بُعد مربع سر پینسکی با رنگ مشکی با توجه به فرمول(۱)برابر است با: D= Log 8/ Log 3=1.89. بُعد مربع سرپینسکی در رنگ های قرمز، سبز و آبی با نرم افزار محاسبه شده است(جدول۳):

جدول ۳. محاسبه بُعد مربع سرپینسکی در رنگ‌های آبی، سبز و قرمز(نگارندگان).

RGB	R=0 G=0 B=0	R=0 G=0 B=255	R=0 G=255 B=0	R=255 G=0 B=0
RGB color				
Gray scale				
Dimen-sion	1.89	1.82	1.38	1.49

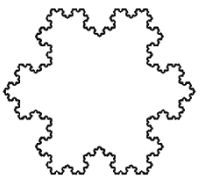
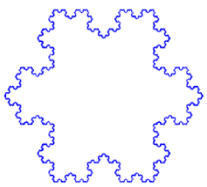
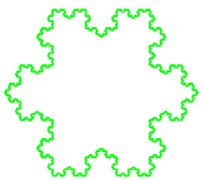
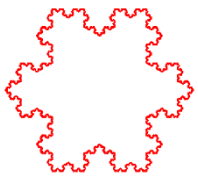
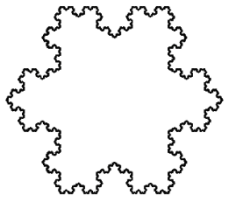
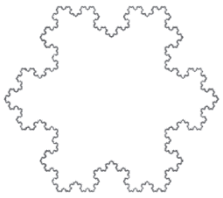
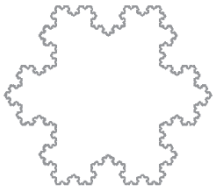
		
آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر قرمز	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر سبز	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویرآبی

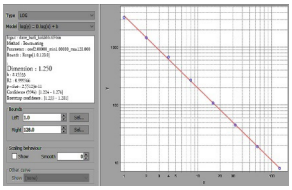
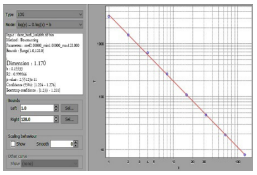
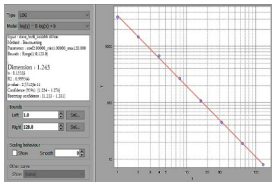
فرکتال پایه ۳: برف دانه کخ

منحنی کخ (برف دانه کخ) توسط هگل ون کخ[۲۶] ریاضیدان سوئدی در سال ۱۹۰۴م معرفی گردید. این منحنی ابداع شد تا ساخت یک منحنی پیوسته را نشان دهد که غیر صاف است و بنابراین تابع خطوط مماس نیست (McClure,2022, p.9). این منحنی بر اساس یک خط راست شروع می شود و سپس قسمت وسط آن برداشته شده و به جای آن مثلث متساوی الاضلاع قرار می‌گیرد که قاعده آن بر داشته شده است. این روند در مقیاس‌های کوچک برای هریک از خطوط باقیمانده تکرار می‌شود(Bovill,1996, p.11). با استفاده از فرمول (۱) بُعد فرکتال منحنی کخ با رنگ مشکی برابر است با: D= Log 4/ Log 3=1.26. بُعد این منحنی در رنگ‌های قرمز، سبز و آبی محاسبه شده است(جدول۴). با توجه به محاسبات انجام شده یکی از عوامل موثر بر بُعد فرکتال‌های پایه رنگ می‌باشد.

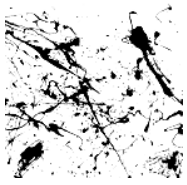
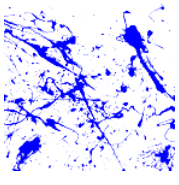
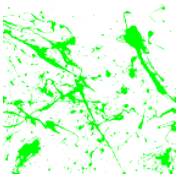
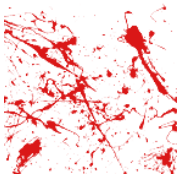
درجدول‌های ۵، ۶ و۷ تاثیر رنگ بر سه نمونه هنر فرکتال نیز بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود علاوه بر پیچیدگی و تراکم، رنگ نیز بر بُعد فرکتال تاثیر دارد.

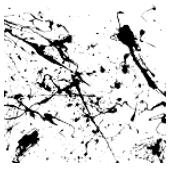
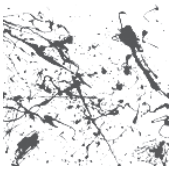
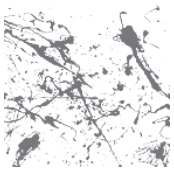
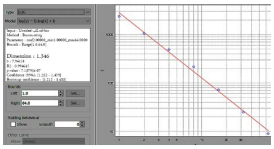
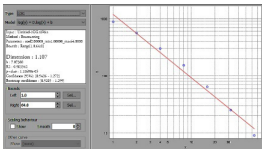
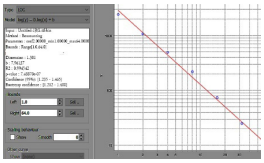
جدول ۴. محاسبه بُعد برف دانه کخ در رنگ‌های آبی، سبز و قرمز(نگارندگان)

RGB	R=0 G=0 B=0	R=0 G=0 B=255	R=0 G=255 B=0	R=255 G=0 B=0
RGB color				
Gray scale				
Dimen-sion	1.26	1.25	1.17	1.24

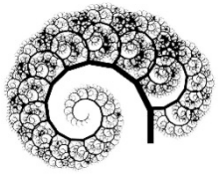
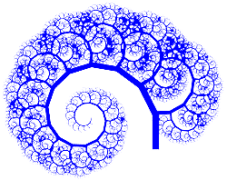
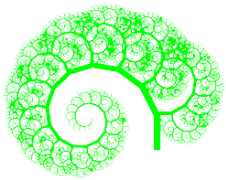
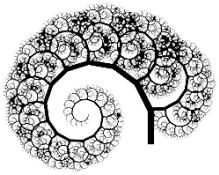
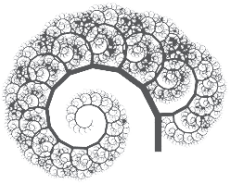
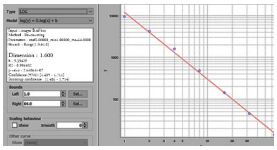
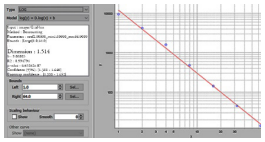
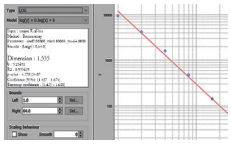
		
آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویرآبی	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر سبز	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر قرمز

جدول ۵. محاسبه بُعد هنرفرکتال۱ در رنگ‌های آبی، سبز و قرمز (نگارندگان)

RGB	R=0 G=0 B=0	R=0 G=0 B=255	R=0 G=255 B=0	R=255 G=0 B=0
RGB color				

Gray scale				
Dimen-sion	1.37	1.34	1.1	1.30
				
	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویرآبی	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر سبز	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر قرمز	

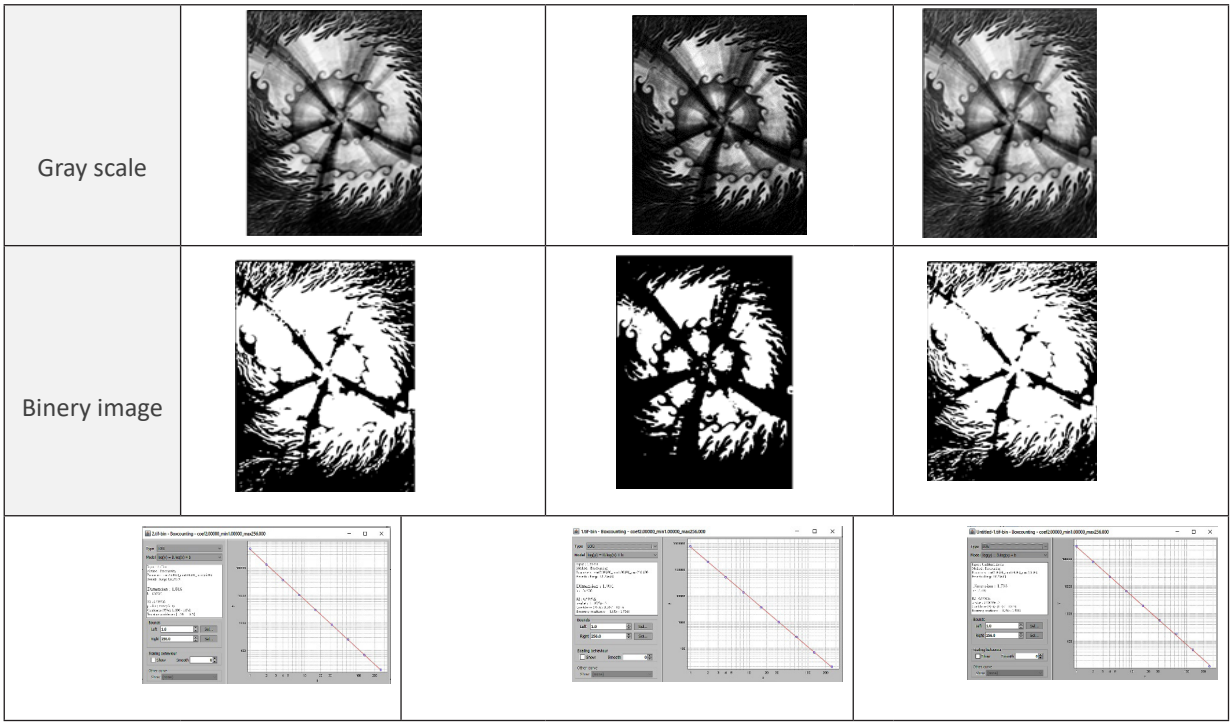
جدول ۶. محاسبه بُعد هنرفرکتال۲ در رنگ‌های آبی، سبز و قرمز (نگارندگان)

RGB	R=0 G=0 B=0	R=0 G=0 B=255	R=0 G=255 B=0	R=255 G=0 B=0
RGB color				
Gray scale				
Dimension	1.62	1.60	1.51	1.55
				
	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویرآبی	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر سبز	آنالیز محاسبه بُعد فرکتال تصویر قرمز	

در (جدول۷) بُعد فرکتال در یک نمونه دیگر از هنرهای فرکتال در ترکیب رنگ‌های متفاوت با استفاده از نرم افزار محاسبه شده است. تصویر خاکستری و باینری ایجاد شده توسط نرم افزار و نمودار محاسبه بُعد در جدول قابل مشاهده است. پس از محاسبه بُعد، رنگ آبی بازهم دارای بیشترین میزان بُعد بود. همچنین تاثیر رنگ‌های مختلف در میزان بُعد مشخص می‌باشد.

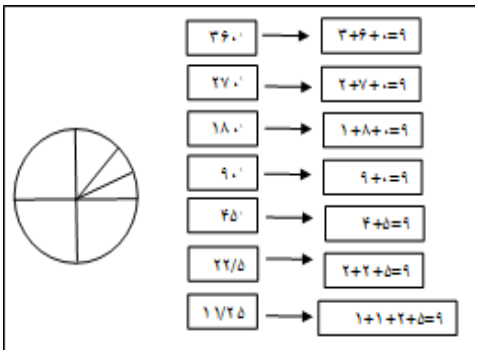
جدول ۷. محاسبه بُعد هنرفرکتال۳ در رنگ‌های مختلف(نگارندگان)

Dimension	1.81	1.90	1.78
Image			



نتیجه‌گیری

در این پژوهش بُعد فرکتال در چند فرکتال پایه و چند نمونه هنر فرکتال در رنگ‌های اصلی قرمز، آبی و سبز با استفاده از نرم افزار فرکتالیز محاسبه شد. تصاویر رنگی به صورت خاکستری وارد نرم افزار می‌شود و تبدیل به تصویر باینری می‌گردد. تصاویر رنگی مختلف دارای شدت خاکستری متفاوت بود و تاثیر مستقیم بر تراکم رنگ در تصویر باینری داشت. در مقایسه این سه رنگ این نتیجه یافت شد که پس از رنگ سیاه، رنگ آبی بیشترین میزان شدت خاکستری و تراکم باینری را دارد و لذا بالاترین بُعد فرکتال را دارا می‌باشد. همچنین رنگ سبز کمترین شدت خاکستری و تراکم باینری و کمترین بُعد فرکتال را داشت. رنگ آبی دارای زینگی ۹ است و در شکل‌های هندسی موافق دایره و دایره کامل‌ترین شکل عالم است. دایره بینهایت خط تقارن دارد، لذا متقارن‌ترین شکل پایه است. همچنین اجماع تمام زوایای اصلی در دایره برابر ۹ می‌شود(تصویر۹).



تصویر۹. بررسی زوایای دایره و برابری با عدد۹(نگارندگان).

رنگ آبی علاوه بر داشتن ویژگی‌های ذکر شده بیشترین بُعد فرکتال بعد از رنگ سیاه را نیز دارا می‌باشد. در جدول۸ میزان تاثیر کاهشی رنگ در بُعد با توجه به تحلیل های انجام شده در نمونه‌های مختلف فرکتال مشخص شده است. همانطور که مشاهده می‌شود. رنگ آبی کمترین اثر کاهشی بر بُعد و رنگ سبز بیشترین تاثیر کاهش بر بُعد را داراست. از طرف دیگر هرچقدر بُعد فرکتال بالاتر باشد میزان تاثیرکاهشی رنگ سبز بر آن بیشتر و هرچه بُعد فرکتال کمتر باشد تاثیر کاهشی رنگ سبز بر آن کمتر است. در نهایت این پژوهش به این نتیجه دست یافت که رنگ یکی دیگر از عواملی است که بر میزان بُعد فرکتال تاثیر گذاراست. از آنجا که بُعد فرکتال معیاری برای کمی سازی میزان پیچیدگی، نامنظمی، بافت و ناهمواری است؛ درنتیجه رنگ‌ها با تاثیر بر بُعد فرکتال، می‌توانند میزان پیچیدگی، نامنظمی، بافت و ناهمواری را بیشتر یا کمتر جلوه دهند.

جدول۸. تاثیر کاهشی رنگ بر بُعد فرکتال(نگارندگان)

نمونه فرکتال	بُعد(رنگ سیاه)	میزان تاثیر رنگ سبز	میزان تاثیر رنگ قرمز	میزان تاثیر رنگ آبی
فرکتال پایه۱	۱٫۵۸	۰٫۱۱	۰٫۰۳	۰٫۰۱
فرکتال پایه۲	۱٫۸۹	۰٫۵۱	۰٫۴	۰٫۰۷
فرکتال پایه۳	۱٫۲۶	۰٫۰۹	۰٫۰۲	۰٫۰۱
هنرفرکتال۱	۱٫۳۷	۰٫۲۷	۰٫۰۷	۰٫۰۳
هنرفرکتال۲	۱٫۶۲	۰٫۱۱	۰٫۰۷	۰٫۰۲

پی‌نوشت

[1] Gray scale

[2] به تصویری گفته می شود که تمام نقاط آن یا سفید باشند و یا سیاه که معمولا رنگ سیاه با عدد ۰ و رنگ سفید با عدد ۱ نشان داده می شود. کاربرد تصویر باینری در پردازش تصویر بسیار مهم و زیاد است، تقریبا اکثر اطلاعات مهم تصویر مانند تعداد ذرات و ویژگی های هندسی آن ها از تصویر باینری استخراج می شود.

[3] Kaplan, Lin

[4] Ansari,Pandey

[5] Nayak, Mishra

[6] Saitis

[7] Webster

[8] Ivanovici, Richard

[9] Scotto Rosato

[10] Fractalyse software -https://fractalyse.software.informer.com/2.4/#google_vignette

[11] در مبحث تاریک وروشن زینه های مختلف تاریکی به روشنی و یا روشنی به تاریکی را زینگی(لون) می نامند. به این ویژگی در زبان انگلیسی tonality می گویند و هر زینه تاریک-روشن را hue می نامند.

[12] Fractal geometry

[13] Fractus-Fractum

[14] Benoit B. Mandelbrot (زاده ۲۰ نوامبر ۱۹۲۴ - درگذشته۱۴ اکتبر ۲۰۱۰) ریاضی‌دان فرانسوی‌تبار آمریکایی بود که به پدر هندسه فرکتالی شهرت یافته‌است.

[15] Phil Webster

[16] Kaplan

[17] self-similarity

[18] Hausdorff

[19] Texture

[20] Complexity

[21] Fracture

[22] Smoothness

[23] Roughness

[24] Serpinski triangle

[25] Wacław Franciszek Sierpiński

[26] Helge von Koch

کتاب‌نامه

استوار، مسیب. (۱۳۹۱). *رنگ*، تهران: انتشارات راز نامه.
اسکندر دوست، میلاد. (۱۳۹۹). *اسرار فرکتال*، انتشارات آرنا.
آیت الهی، حبیب الله. (۱۴۰۱). *مبانی نظری هنرهای تجسمی*، تهران: انتشارات سمت، چاپ سیزدهم.
جوکار، جلیل. (۱۳۸۹). *شیوه های رنگ‌سازی در قلمرو هنر و نقاشی*، تهران: انتشارات متن، چاپ دوم.
گروسی، مهرداد. (۱۳۸۷). فرکتال آرت، *آیینه خیال*، شماره۹، ۳۰-۲۰.
محمودی،کورش و شکیبا منش، امیر. (۱۳۸۹). *اصول و مبانی رنگ شناسی در معماری و شهرسازی*، انتشارات طحان.
مصدقیان، وحیده. (۱۳۸۴). *نقش ورنگ در مسجد گوهرشاد*، انتشارات کتاب آبان، چاپ اول.
Abdelsalam, M & Ibrahim, M. (2018). "Fractal Dimension of Islamic Architecture: The case of the Mameluke, Madrasas: Al-Sultan Hassan Madrasa", *Journal of Science*, 32(1),27-37.

Ansari, Farhan Akhtar, Pandey, Yogdhar .(2020). "Calculating Fractal Dimension of Grey scale and Color image by using DBC and RCC" , *International Research Journal of Engineering and Technology,* (7),1467-1474.

Aswathy, RK& Mathew, S. (2016). "On different forms of self-similarity", *Journal of Chaos, Solitons & Fractals,* 87,102-108.
Barnsley, MF. (1988). *Fractals Everywhere*, (2nd ed.). Morgan Kaufmann.
Blanco, p, Maduraga, S & Isvoran, A. (2020). *Fractal Dimension*, Department of Material Science and Physical Chemistry.
Bovill, carl. (1996). *Fractal Geometry in Architecture and Design,* Springer Science & Business Media.
Eglash, R. (1999). *African Fractals,* Modern Computing and Indigenous Design.
Frantz, M& Crannell, A. (2011). *Viewpoints: Mathematical Perspective and FractalGeometry in Art*. Princeton University Press.
Ivanovici, Mihai, Richard, Noel.(2011). *Fractal dimension of color,* Fractal images.
Kaplan, Craig, Lin, Rebecca. (2023). *Freeform Islamic,* Geometric Patterns, arXiv:2301.01471v1.
Lee, S, Olsen, S & Gooch, S. (2007). Simulating and analyzing Jackson Pollock's paintings, *Journal of Mathematics and the Arts,* (1) ,73-83.
Mandelbrot, Benoit B (1982). *The Fractal Geometry of Nature*, New York: W. H. Freeman.
McClure, M. (2022). *Fractal Geometry,* University of North Carolina, Yale University.
Nayak, Soumya Ranjan, Mishra, Jibitesh .(2017). On Calculation of Fractal Dimension of Color Images, I.J. Image, *Graphics and Signal Processing*, 33-40.
Peitgen, HO & Richter, H .(1986). *The beauty of fractals*, Springer Science & Business.
Pickover, Clifford .(1995). *Pattern Book*, Fractal.art.and nature, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
Rezazade, Hengame. (2020). Visual and S tructural Analysis of Fractal Geometry in the Sheikh Lotfollah Mosque Ornaments, (Isfahan- Iran), *International Journal of Architecture.*
Saitis, Charalampos. (2017). Fractal Art: Closer to Heaven? Modern Mathematics, the Art of Nature, and the Nature of Art, *Technical University,* Berlin,153-162
Sandau.k .(1997). Measuring fractal dimension and complexity, an alternative approach with an application, *Journal of Microscopy,* 164-176
Scotto Rosato, Giudi. (2010). Fractal art, *Journal of Science Communication.* 9(4).
Tanasie, Razvan, Popescu, Milhai, Bogheanu, Dana. (2007). Fractal Art: Fractal Image and Music Generator, *Computational Geometry & Artificial Vision,* Athens, Greece, 24-26.
Taylor, R.P, Guzman, R, Martin, T.P, Hall, G.D.R. (2007). *Authenticating Pollock paintings using fractal geometry.* Pattern Recognition Letters.
Toledo Museum of Art. (2013). Crossing cultures, shape, line, and color in Aboriginal Art.
Webster, Phil. (2013)." Fractal Islamic Geometric Patterns Based on Arrangements of {n/2} Stars, *Mathematics, Music,* Art, Architecture, Culture,87-94.
Ziukelis, Elina, Mak, Elijah , Dounavi, Maria-Eleni, Su, Li, O'Brien, John T .(2022). Fractal dimension of the brain in neurodegenerative disease and dementia: A systematic review, *Ageing Research Reviews.*
URL1: https://www.tehrantimes.com/news/240993/Tehran-museum-to-host-intl-exhibit-on-fractalism.